Trabalho Nº3 - Modelos Markovianos

Willian Meira Schlichta - GRR20159077

18 de Agosto de 2020

### Exercicio 1

Mostrar que se o estado é recorrente e não se comunica com o estado , então

**Desenvolvimento:**

Seja onde é um estado recorrente e não se comunica com , ou seja, .

Seja uma Cadeia de Markov com espaço de estados onde é o número de vezes em que a cadeia permanece no espaço , então:

Também observamos que é o mesmo que logo:

Temos que a probabilidade com a qual a cadeia começando em visitar a primeira vez no tempo e visitar novamente no tempo (onde e são inteiros positivos) é:

Logo:

$$P\_{x}(N(y)\geq2)=\sum\_{m=1}^{\infty}\sum\_{n=1}^{\infty}P\_{x}(T\_{y}=m).P\_{y}(T\_{y}=n)\\
=\left [ \sum\_{m=1}^{\infty}P\_{x}(T\_{y}=m) \right ].\left [ \sum\_{n=1}^{\infty}P\_{y}(T\_{y}=m)\right ]=\rho\_{x,x}\rho\_{x,y}=1\*0=0$$

### Exercicio 3

Mostre que se o estado se comunica com e se comunica com , então se comunica com .

**Desenvolvimento:**

Se se comunica com , sabemos que , para algum finito.

Se se comunica com , também sabemos que , para algum finito.

Então: , logo se comunica com .

### Exercicio 4

Considere uma Caceia de Markov com espaço de estados e matriz de probabilidades de transição

Esta cadeia é irredutível? Ou seja, prove que o conjunto de estados irredutíveis satisfaz , sendo . Prove também que esta cadeia é recorrente, ou seja, prove que cada estado em é recorrente.

**Desenvolvimento:**

Verificando o *summary* da cadeia:

Γ Markov chain that is composed by:   
Closed classes:   
1 2 3 4 5 6 7 8 9   
Recurrent classes:   
{1,2,3,4,5,6,7,8,9}  
Transient classes:   
NONE   
The Markov chain is irreducible   
The absorbing states are: NONE

Aqui temos que todos os estados se comunicam, logo a matriz é irredutível. Também observamos que os estados são ditos recorrentes.

Do teorema 17: Seja **F** um conjunto finito e fechado de estados irredutíveis. Então cada estado em **F** é recorrente.

Como a matriz é irredutível e todos seus estados são recorrentes, a matriz é dita recorrente.

### Exercicio 6

**A Fiscalía de Mídia** identificou seis estados associados à televisão: 0 (nunca assiste TV), 1 (assiste apenas notícias), 2 (assiste TV com bastante frequência), 3 (viciado), 4 (em modificação de comportamento), 5 (morte encefálica). As transições de estado para estado podem ser modeladas como uma cadeia de Markov com a seguinte matriz de transição:

a) Quais estados são recorrentes e quais transientes.  
b) Começando do estado $1$, qual é a probabilidade de o estado $5$ ser atingido antes do estado $0$, ou seja, qual é a probabilidade de um visualizador de notícias acabar com morte cerebral?

**Desenvolvimento A:**

Γ Markov chain that is composed by:   
Closed classes:   
0   
5   
Recurrent classes:   
{0},{5}  
Transient classes:   
{1},{2},{3,4}  
The Markov chain is not irreducible   
The absorbing states are: 0 5

Pelo *summary* da cadeia temos que os estados recorrentes (e absorventes) são {0} e {5} e os transientes são {1}, {2}, {3,4}.

**Desenvolvimento B:**

Para encontrarmos as probabilidades assintóticas, podemos utilizar uma potência elevada da matriz de transição:

Γ^50000   
 A 6 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:   
 0, 1, 2, 3, 4, 5   
 The transition matrix (by rows) is defined as follows:   
 0 1 2 3 4 5  
0 1.00 0 0 0 0 0.00  
1 0.66 0 0 0 0 0.34  
2 0.32 0 0 0 0 0.68  
3 0.20 0 0 0 0 0.80  
4 0.60 0 0 0 0 0.40  
5 0.00 0 0 0 0 1.00

Logo, partindo do estado 1, o visualizador terá probabilidade de 0.34 de ter morte cerebral antes de atingir o estado 0.